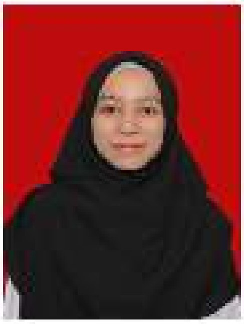
MODIFIKASI VARIAN METODE SCHRODER MENGGUNAKAN DERET TAYLOR ORDE DUA

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh :

RAMADHANI YULMI PUTRI
11554202653



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

MODIFIKASI VARIAN METODE SCHRODER
MENGGUNAKAN DERET TAYLOR ORDE DUA

TUGAS AKHIR

oleh:

RAMADHANI YULMI PUTRI
11554202653

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 25 Oktober 2019

Ketua Jurusan	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

LEMBAR PENGESAHAN

MODIFIKASI VARIAN METODE SCHRODER MENGGUNAKAN DERET TAYLOR ORDE DUA

TUGAS AKHIR

oleh:

RAMADHANI YULMI PUTRI
11554202653

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 25 Oktober 2019

Pekanbaru, 25 Oktober 2019
Mengesahkan

Plt. Dekan	**Ketua Jurusan**
Dr. H. Suryan A. Jamrah, MA.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19591009 198903 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : Ari Pani Desvina, M.Sc.

Sekretaris : Wartono, M.Sc.

Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.

Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.

iii

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 25 Oktober 2019

Yang membuat pernyataan,

RAMADHANI YULMI PUTRI
NIM. 11554202653

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin, yang pertama dan paling utama kuucapkan rasa Syukurku pada rahmat dan kasih sayangmu ya Allah yang telah memberikan aku kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga dapat menyelesaikan kuliah dan Tugas Akhir ini dengan baik. Dan juga tak lupa Shalawat serta salam yang selalu tercurah untuk Baginda, Kekasih Allah Yakni Nabi Besar Muhammad SAW. Yang telah membawa manusia dari alam yang penuh kegelapan dan kejahiliyahan menuju cahaya yang terang benderang dan penuh dengan ilmu pengetahuan.

Ayahanda Komi Chaniago, SH. dan ibunda Yuliani, SP.

Terimakasihku persembahkan kepada kedua orang tuaku yang telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang dan pengorbanannya. Terimakasih kepada Raja kehidupan, Raja dari putri putranya, lelaki pertama dihidupku yang selalu ada untukku. Keringat , keluh, sedih, dan kesal beliau simpan sendiri demi kebahagian keluarganya. Bagaimanapun keadaan, beliau selalu mengusahakan yang terbaik dan tetap tegar agar kami hidup dengan layak serta mendapatkan Pendidikan yang bermutu. Saya ucapkan terimakasih kepada Ratu dikehidupanku, Ratu bagi putra putrinya, tutor kehidupanku, dan sahabat hidupku. Beliau mengajarkanku bagaiman menjadi perempuan yang baik, anak yang baik, dan orang bermanfaat. Terkhusus untuk ayah dan ibundaku tercinta yang tangannya tak pernah lelah berdoa untuk kebaikanku dan kelancaran ku dalam menuntut ilmu.

Kalian vitamin hidupku yang tak pernah lelah dalam segala hal dan senantiasa menyebut namaku dalam doa. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhanku selama menuntut ilmu.

Keluarga Besar

Terimakasih telah memberi support baik berupa semangat maupun materi selama ini, dan terimakasih kepada semua keluarga besar yang selalu mendoakanku.

Wartono, M.Sc

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Mohammad Soleh, S.Si., M.Sc

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan selama ini. Beliau selalu dengan sabar mendengarkan keluhan dan ocehan dari mahasiswa bimbingannya.

Sahabat-Sahabatku:

Yang tak pernah bosan memarahi, mengkritik dan memberi semangat kepadaku. Terimakasih atas kebersamaan kita baik dalam suka maupun duka. Tiada kata yang pantas terucap selain terimakasih atas motivasi dan semua bantuannya.

Terimakasih Untuk seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU terkhusus Jurusan Matematika

MODIFIKASI VARIAN METODE SCHRODER MENGGUNAKAN DERET TAYLOR ORDE DUA

RAMADHANI YULMI PUTRI
NIM: 11554202653

Tanggal Sidang : 25 Oktober 2019
Tanggal Wisuda : Juni 2020

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Schroder merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear dengan orde konvergensi dua. Kemudian pada tugas akhir ini, Metode Schroder dikembangkan menjadi metode iterasi baru dari memodifikasi varian Metode Schroder dengan menggunakan Deret Taylor orde dua. Turunan kedua direduksi dengan menggunakan deret eksplisit Deret Taylor. Berdasarkan hasil penelitian, metode iterasi baru mempunyai orde konvergensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}587401$. Simulasi numerik dilakukan untuk menguji metode iterasi baru yang meliputi jumlah iterasi, COC, nilai fungsi, galat mutlak dan galat relatif yang selanjutnya dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Hasil numerik menunjukkan keefektifan metode iterasi baru dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Kata Kunci: Evaluasi fungsi, indeks efisiensi, Metode Schroder, orde konvergensi, persamaan nonlinear.

MODIFICATION OF THE SCHRODER METHOD VARIANT USING A SECOND-ORDER TAYLOR SERIES

RAMADHANI YULMI PUTRI
NIM: 11554202653

Date of Final Exam : October, 25 2019
Date of Graduation : June, 2019

Mathematics Departement
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

Schroder method is an iteration method used to determine the roots of nonlinear equations with the order of convergence two. Then in this final project, the Schroder Method is developed into a new iteration method from the variation method of the Schroder Method using the second-order Taylor Series. The second derivative is reduced by using the explicit series of the Taylor Series. Based on the results of the study, the new iteration method has a four-order convergence that involves three evaluation functions with an efficiency index of $4^{1/3} \approx 1{,}587401$. *Numerical simulations are performed to test the new iteration method which includes the number of iterations, COC, function values, absolute errors and relative errors which are then compared with other iteration methods. Numerical results show the effectiveness of the new iteration method in solving nonlinear equations.*

Keywords: *Function Evaluation, Efficiency Index, Schroder Methods, Order Convergence, Nonlinear Equations.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin. Puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul "**Modifikasi Varian Metode Schroder Menggunakan Deret Taylor Orde Dua"**. Shalawat berserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, semoga kita mendapat syafaat-nya kelak. Penulis Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukkan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkann terimakasih khususnya kepada kedua orangtua tercinta Ayahanda Komi Chaniago dan Ibunda Yuliani yang selalu mendoakan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Ariyani, M.Sc., selaku Sekretaris Progam Studi Matematika.
5. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukkan, saran setra dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
7. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukkan, saran setra dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

8. Bapak Mohammad Soleh, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa membimbing, memberi arahan serta nasehat kepada Penulis dari awal perkuliahan.
9. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Progam Studi Matematika.
10. Sahabat-sahabat penulis terimakasih atas bantuan, masukkan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada Penulis.
11. Teman-teman seperjuangan di Progam Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2015 yang telah banyak memberikan bantuan, masukkan serta dukungan.
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan Tugas Akhir hingga selesai, yang tidak dapat Penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin.*

Pekanbaru, 25 Oktober 2019

Ramadhani Yulmi Putri

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$f(x)$	: Fungsi f dari variabel bebas x
f'	: Turunan pertama fungsi f
f''	: Turunan kedua fungsi f
$f^{(n)}$	: Turunan ke-n fungsi f
$O(h^n)$	: Orde hampiran
$\approx$	: Hampiran
e	: Galat atau *error*
!	: Faktorial
α	: Akar persamaan
ρ	: Nilai COC
$\{x_n\}$	: Barisan bilangan real
EI	: Indeks efisiensi
p	: Orde konvergensi
r	: Jumlah evaluasi fungsi
$\in$	: Anggota atau elemen
x_0	: Nilai awal
$R_n(x)$	: Suku sisa deret taylor

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR TABEL

DAFTAR SINGKATAN

COC : *Computational Order of Convergence*

MN : Metode Newton

SC : Metode Schroder

MC : Metode Chebyshev

MH : Metode Halley

P.15 : Modifikasi Varian Metode Schroder Menggunakan Deret Taylor Orde Dua

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran **Halaman**

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode numerik banyak diaplikasikan untuk menentukan akar-akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ dengan $f: I \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ yang merupakan fungsi skalar diselang terbuka I . Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear yaitu Metode Newton yang menggunakan sebuah tebakan awal x_0 sebagai langkah awal memulai iterasi, apabila nilai tebakan awal diambil cukup dekat ke akar α maka akan konvergen secara kuadratik. Oleh karena Metode Newton memiliki konvergensi orde dua, maka metode tersebut paling cepat menghampiri akar persamaan nonlinear.

Bentuk Metode Newton adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{dengan } n = 0,1,2,3, \ldots,\text{k}. \tag{1.1}$$

Selain Metode Newton, beberapa peneliti juga menggunakan metode lain untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi. Salah satu metode itu adalah Metode Schroder yang memiliki orde konvergensi kuadratik dengan rumus umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1-L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.2}$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Beberapa peneliti telah mengembangkan Metode Schroder dengan menggunakan beberapa pendekatan. Seperti Kanwar, dkk (2009) yang memodifikasi varian Metode Schroder yang memiliki konvergensi orde tiga dalam *Journal Mathematics Education Science Technology* dengan judul *A Family of Ellipse Methods for Solving Non-Linear Equations* (Gupta, dkk 2009) dan mengaplikasikan Deret Kuasa dengan bentuk

$$m_\alpha = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}. \tag{1.3}$$

Thukral (2015) mendapatkan tipe Metode Schroder orde tiga baru dengan mengaproksimasikan m multiplisitas, sehingga diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\left(f(x_n)f'(x_n)^2 - f(x_n)^2 f''(x_n)\right)}{3f'(x_n)^3 - 3f(x_n)f'(x_n)f''(x_n) + f(x_n)^2 f'''(x_n)}. \tag{1.4}$$

Selain itu, Thukral (2016) telah menyajikan dua metode iteratif multi-titik baru untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan beberapa akar, yang menunjukkan secara analitik dan numerik bahwa metode iteratif tipe Schroder baru konvergen ke orde empat. Metode iteratif baru ini menetapkan metode konvergensi orde yang lebih tinggi daripada metode orde ketiga dalam *American Journal of Compuational and Applied Mathematics* dengan judul *New Third-Order Scroder-Type Method for Finding Zeros of Nonlinear Equation Having Unknown Multiplicity* (Thukral R,2015) dan menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$x_{n+1} = y_n - \left(\frac{f(y_n)f'(y_n)}{f'(y_n)^2 - f(y_n)f''(y_n)}\right), \tag{1.5}$$

dan

$$x_{n+1} = y_n - \left(\frac{f'(x_n)^2}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)\left(\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}\right). \tag{1.6}$$

Selanjutnya, Thukral (2017) menemukan konvergensi orde empat metode baru Schroder yang dibuktikan dengan mengaproksimasikan akar ganda dari persamaan nonlinear dengan menambahkan lima parameter yang berbeda. Sehingga diperoleh persaaman dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \left[\frac{\mu_1 f'(x_n)^3 - \mu_2 f(x_n)f'(x_n)f''(x_n)}{\mu_3 f'(x_n)^3 - \mu_4 f(x_n)f'(x_n)f''(x_n) + \mu_5 f(x_n)^2 f'''(x_n)}\right]\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right). \tag{1.7}$$

Pada Tugas Akhir ini, penulis akan memodifikasi Metode Schroder menggunakan Deret Taylor orde dua. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada buku *Iterative Methods for The Solution of Equation,* (Traub,1964) menggunakan Deret Taylor orde dua dengan bentuk persamaan sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)+\frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)}. \tag{1.8}$$

Kemudian mengaplikasikan Metode Newton ke-x_{n+1} pada $f''(x_n)$ diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2+f''(x_n)f(x_n)}. \tag{1.9}$$

Persamaan (1.9) biasa dikenal dengan Metode Halley.

Eskandari (2008) mendapatkan akar dari persamaan nonlinear $f(x) = 0$ yang diselesaikan dengan menggunakan ekspansi Taylor dalam *Journal Applied Mathematics and Computation* dengan judul *A new hybrid iteration method for algebraic equations* (Ide, 2008). Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh peneliti di atas, maka penulis tertarik untuk mengambil judul "**Modifikasi Varian Metode Schroder Menggunakan Deret Taylor Orde Dua**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang permasalahan, penulis merumuskan permasalahan penelitian ini adalah bagaimana menentukan orde konvergensi baru dari modifikasi Metode Schroder menggunakan Deret Taylor orde dua.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah fungsi f nonlinear dengan satu variabel dan bernilai riil.

1.4 Tujuan Penelitian

1. Mendapatkan persamaan iterasi dari modifikasi Metode Schroder;
2. Mendapatkan orde konvergensi yang dihitung menggunakan ekspansi Deret Taylor;
3. Mendapat gambaran performa metode iterasi baru yang terdiri dari : jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi, nilai mutlak fungsi, galat mutlak dan galat relatif.

1.5 Manfaat

Manfaat penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan kontribusi pengetahuan khususnya dibidang numerik;
2. Sebagai acuan untuk mengembangkan metode lain yang guna untuk menyelesaikan persamaan nonlinier;
3. Dapat digunakan untuk menentukan akar-akar dari persamaan nonliner dengan tingkat kekonvergenan yang lebih tinggi.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang Deret Taylor, Orde Hampiran, Orde Konvergensi, Indek Efisiensi, Metode Newton dan orde konvergensinya, serta Metode Schroder dan orde konvergensinya.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang akan digunakan dalam pembuatan tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari Persamaan (1.2) menggunakan Deret Taylor orde dua dan mendapatkan orde konvergensi yang dilengkapi dengan kondisi khusus dan simulasi numerik.

BAB V Kesimpulan dan Saran

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret dari suatu fungsi yang terdeferensiasi dapat dinyatakan dalam suatu deret suku banyak (*polynomial*) atau dalam deret pangkat dengan suku yang tak-terhingga. Bentuk Deret Taylor yang berupa limit *polynomial* sering digunakan untuk menghampiri fungsi yang sangat rumit.

Teorema 2.1 (Burden, dkk. 2010) Andaikan $f \in C^n[a,b]$ dan $f^{(n+1)}(x)$ ada pada $[a,b]$ dan andaikan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk setiap x pada $[a,b]$ terdapat $\xi(x)$ antara x_0 dan x dengan,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

dengan

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \tag{2.1}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{2.2}$$

Persamaan (2.1) $P_n(x)$ merupakan polinomial Taylor yang ke-n dari f disekitar x_0, dan Persamaan (2.2) $R_n(x)$ adalah suku sisa atau galat bisa disebut juga *truncation error* yang berkaitan dengan polinomial $P_n(x)$. Suatu deret tak berhingga yang diperoleh dengan cara mencari limit dari $P_n(x)$ dengan $n \to \infty$ disebut Deret Taylor dari f disekiar x_0.

Contoh 2.1 : Tuliskanlah nilai hampiran Deret Taylor $P_4(x)$ dari $f(x) = \cos(x)$ sekitar $x_0 = 0$!

Penyelesaian:

$f(x) = \cos(x)$, maka $f(0) = 1$,

$f'(x) = -sin(x)$, maka $f'(0) = 0$,

$f''(x) = -\cos(x)$, maka $f''(0) = -1$,

$f'''(x) = sin(x)$, maka $f'''(0) = 0$,

$f^{iv}(x) = \cos(x)$, maka $f^{iv}(0) = 1$.

Berdasarkan Persamaan (2.1), bentuk $f(x)$ dihampiri dengan Deret Taylor dengan $P_4(x)$.

$$P_1(x) = 1 + 0(x-0),$$
$$= 1$$
$$P_2(x) = 1 + 0(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2,$$
$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!},$$
$$= \frac{2-x^2}{2!},$$
$$P_3(x) = 1 + 0(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4,$$
$$= 1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0,$$
$$= \frac{2-x^2}{2!},$$
$$P_4(x) = 1 + 0(x-0) + \frac{-1}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4,$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

2.2 Orde Hampiran

Definisi 2.1 Orde Hampiran (Chapra, dkk. 2015) Misalkan nilai fungsi $f(h)$ dihampiri oleh fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \leq L|h''|$, dengan L merupakan konstanta riil dan $L > 0$ maka dapat dikatakan $p(h)$ menghampiri fungsi $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ sehingga dapat ditulis

$$f(h) = p(h) + O(h^n), \tag{2.3}$$

dan $O(h^n)$ diartikan orde galat atau error dari penghampiran fungsi.

Karena pada umumnya, h cukup kecil yaitu kurang dari 1, maka semakin tinggi nilai n, *galat* atau *error* berarti teliti nilai penghampiran fungsinya.

Persamaan umum Deret Taylor yang sering digunakan untuk menghampiri nilai dari suatu fungsi yaitu,

$$x_{j+1} = x_j + h, \quad \text{dengan } j = 1,2,3, \dots n$$

dan titik-titik selebar h, maka hampiran fungsi $f(x_{j+1})$ dengan Deret Taylor di sekitar x_j adalah

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + f'(x_j)\,(x_{j+1} - x_j) + \frac{f''(x_j)}{2!}\,(x_{j+1} - x_j)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_j)}{n!}\,(x_{j+1} - x_j)^n + R_n(x_{j+1}),$$

$$= f(x_j) + f'(x_j)(h) + \frac{f''(x_j)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_j)}{n!}\,h^n + R_n(x_{j+1}). \quad (2.5)$$

dengan,

$$R_n(x_{j+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)} f^{(n+1)}(t) = \mathrm{O}(h^{n+1}), \qquad x_j < t < x_{j+1}. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) menyatakan bahwa jika fungsi $f(x)$ dihampiri dengan Deret Taylor derajat n, maka suku sisanya cukup dinyatakan dengan $\mathrm{O}(h^{n+1})$. Pada suku sisa digunakan notasi O-besar dengan suku yang dimulai dengan perpangkatan h^{n+1}.

2.3 Orde Konvergensi

Definisi 2.2 Orde *Konvergensi* (Thukral, 2017) Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah *error* pada iterasi ke-n, maka didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + \mathrm{O}(e_n^{p+1}). \quad (2.7)$$

merupakan persamaan error atau galat. Jika persamaan galat ada, maka p adalah orde konvergensi dari metode iterasi.

Definisi 2.3 *Galat Orde Konvergensi* (Stoer, dkk. 1991) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi nilai real dengan akar persamaan α dan misalkan $\{x_n\}$ merupakan sebuah barisan dari bilangan real yang konvergen menuju α. Orde konvergensi n adalah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} = \xi, \qquad \xi \neq 0. \quad (2.8)$$

dengan $p \in \mathbb{R}$ dan ξ asimptotik konstanta galat (*asymptotic error constant).*

Definisi 2.4 ***Computational Order of Convergence*** **(COC) (Sharma, dkk. 2011).** Misalkan bahwa x_j dan x_{j+1} berturut-turut adalah iterasi yang menuju ke akar α maka COC yang didefinisikan dengan ρ dapat diaproksimasikan sebagai berikut:

$$\rho \approx \frac{\ln|(x_{j+1}-\alpha)/(x_j-\alpha)|}{\ln|(x_j-\alpha)/(x_{j-1}-\alpha)|}, j = 0,1,2,\dots,n. \tag{2.9}$$

Contoh 2.2 : Diketahui fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ dengan menggunakan Metode Newton tentukan iterasi fungsi awal $x_0 = 1$, ketelitian $\varepsilon = 10^{-6}$ dengan menggunakan 6 digit desimal

Penyelesaian :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

Subsitusikan ke Persamaan (2.9) diperoleh

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= 1{,}000000 - \frac{2{,}000000}{7{,}000000} \\ &= 0{,}71428571 \end{aligned}$$

dengan menggunakan cara yang sama diperoleh

$x_2 = -0{,}035714$, $x_3 = -1{,}163919$ dan $x_4 = -2{,}648294$

sehingga $\alpha = -2{,}648294$. Selanjutnya dengan menggunakan tiga iterasi awal yaitu x_0, x_1 dan x_2 maka diperoleh

$$\rho \approx \frac{\ln|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)|}{\ln|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)|},$$

$$\rho \approx \frac{\ln|(-0{,}035714-(-2{,}648294))/(0{,}71428571-(-2{,}648294))|}{\ln|(0{,}71428571-(-2{,}648294))/(1{,}000000-(-2{,}648294))|},$$

$$\rho \approx -55{,}73205$$

2.4 Indek Efisiensi

Evaluasi dari sebuah fungsi metode iterasi akan diukur dengan menggunakan indeks efisiensi. Nilai dari indeks efisiensi pada metode iterasi dapat diketahui lebih bagus dari metode iterasi sebelumnya berdasarkan definisi berikut:

Definisi 2.5 ***Efficiency Index*** **(Thukral, 2016).** Misalkan r adalah jumlah evaluasi fungsi dari metode iterasi. Efisiensi metode iterasi diukur dengan konsep indeks efisiensi dan didefenisikan sebagai:

$$EI = p^{1/r}, \tag{2.10}$$

dengan p adalah orde konvergensi dari metode iterasi.

Contoh 2.3 Tabel indeks efisiensi metode iterasi

No	**Metode Iterasi**	**Orde (*p*)**	**Evaluasi Fungsi (*r*)**	**Indeks Efisiensi (*IE*)**
1	Newton (Traub, 1964)	2	2	$2^{1/2} \approx 1{,}414214$
2	Schroder (Thukral, 2017)	2	3	$2^{1/3} \approx 1{,}259921$
3	Chebyshev (Amat dkk, 2008)	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}442249$
4	Halley (Gander, 1985)	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}442249$
5	Persamaan (4.15)	4	3	$4^{1/3} \approx 1{,}587401$

2.5 Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson yang sering disingkat dengan Metode Newton merupakan metode paling populer untuk metode penyelesaian persamaan nonlinear dengan pendekatan suatu titik. Jika diasumsikan f memiliki diferensial kontinu f'. Maka secara geometri, Metode Newton hampir sama dengan Metode Posisi Palsu (*False Position Method*), bedanya garis yang dipakai adalah garis singgung. Apabila x_0 diambil cukup dekat dengan α maka metode ini cepat untuk memperoleh perhitungan nilai sebenarnya (konvergen). Metode Newton diperoleh dari pemotongan Deret Taylor orde satu, sebagai berikut;

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n). \tag{2.11}$$

Selanjutnya, dengan memisalkan $x = x_{n+1}$ sehingga diperoleh Persamaan (2.11) menjadi

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n). \tag{2.12}$$

Oleh karena pada iterasi ke $(n+1)$, $x_{n+1} = \alpha$, maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, sehingga persamaan (2.12) menjadi

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n), \tag{2.13}$$

Selanjutnya, kedua ruas dibagi dengan $f'(x_n)$ dan dengan menggunakan aljabar diperoleh

$$(x_{n+1} - x_n) = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.14}$$

atau dapat ditulis dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.15}$$

Persamaan (2.15) merupakan Metode Newton.

Orde Konvergensi Newton

Orde konvergensi dari Metode Newton akan dibuktikan dengan menggunakan teorema berikut ini :

Teorema 2.2 (Burden, dkk. 1991) Andaikan $f(x)$ memiliki deviratif kontinu f' dan andaikan α adalah akar persamaannya, sehingga $f(\alpha) = 0$ tetapi $f'(\alpha) \neq 0$. Diberikan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.15) memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3), \tag{2.16}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti :

Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, serta dengan menggunakan rumus ekspansi Deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\
&= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&= 0 + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\
&= f'(\alpha)(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + O(e_n^4), \\
&= f'(\alpha)\big(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\big), \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

dengan

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 1,2,3,\ldots$$

Selanjutnya $f(x_n)$ diturunkan terhadap e_n dengan $f'(x_n)$ di sekitaran α untuk $x = x_n$, maka diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right), \tag{2.18}$$

Jika Persamaan (2.17) dibagi dengan Persamaan (2.18), diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + 2c_2e_n^2 + 3c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)},$$

$$= \frac{\left(e_n + 2c_2e_n^2 + 3c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}, \tag{2.19}$$

Untuk mempermudah penyelesaian Persamaan (2.17), maka diubah dalam bentuk deret geometri

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots \tag{2.20}$$

Diasumsikan bahwa $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)$ dengan menggunakan Persamaan (2.19), maka diperoleh

$$\frac{1}{f'(x_n)} = \frac{1}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)},$$

$$= \left(1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)) + (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^2 - \cdots\right), \tag{2.21}$$

Kemudian Persamaan (2.17) dikalikan dengan Persamaan (2.21), dan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n + 2c_2e_n^2 + 3c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)) + (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^2 - \cdots\right),$$

$$= \left(e_n + 2c_2e_n^2 + 3c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times -1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)),$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.22}$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (2.22) ke Persamaan (2.15), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - (e_n - c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.23}$$

Oleh karena $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka

$$\alpha + e_{n+1} = \alpha + e_n - (e_n - c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)),$$

atau dapat ditulis

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \quad \blacksquare \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) terbukti merupakan persamaan *error* Metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik dengan melibatkan dua evaluasi fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ serta memiliki indeks efesiensi $2^{1/2} \approx 1{,}414214$.

2.6 Metode Schroder

Metode Schroder adalah salah satu proses iteratif klasik orde dua yang merupakan modifikasi Metode Newton dengan polinomial orde pada persamaan nonlinear. Misalkan f adalah fungsi x yang kontinu dan $f(x)$ akan diekspansi dipersekitaran x_n maka berdasarkan Teorema Taylor diperoleh bentuk umum dari metode Schroder sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) merupakan Metode Schroder yang memiliki tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$.

Orde Konvergensi Schroder

Misalkan $x \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset R \to R$ yang terdiferensial pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke akar x, maka orde kekonvergenan Metode Schroder pada persamaan berorde dua untuk $\alpha = \frac{1}{3}$ sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = -c_2 e_n^2 + O(e_n^3). \tag{2.26}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti :

Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, serta dengan menggunakan rumus ekspansi Deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\ &= 0 + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned}$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + O(e_n^4),\right.$$

$$= f'(\alpha)\big(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big), \quad (2.27)$$

dengan

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^j(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 1,2,3, \ldots$$

Selanjutnya $f(x_n)$ diturunkan terhadap e_n dengan $f'(x_n)$ di sekitaran α untuk $x = x_n$, maka diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\big(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big), \quad (2.28)$$

Kemudian jika $f'(x_n)$ juga diturunkan terhadap e_n dengan $f''(x_n)$ di sekitaran α untuk $x = x_n$, maka diperoleh

$$f''(x_n) = f'(\alpha)\big(2c_2 + 6e_n + O(e_n^2)\big), \quad (2.29)$$

Jika Persamaan (2.27) dikalikan dengan Persamaan (2.28), diperoleh

$$f(x_n)f'(x_n) = f'(\alpha)\big(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big) \times f'(\alpha)\big(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big)$$

$$= f'(\alpha)^2\big(e_n + 3c_2e_n^2 + (4c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\big), \quad (2.30)$$

Kemudian jika pada Persamaan (2.27) dikalikan dengan Persamaan (2.29) diperoleh

$$f(x_n)f''(x_n) = f'(\alpha)\big(e_n + 2c_2e_n^2 + 3c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big) \times f'(\alpha)\big(2c_2 + 6e_n + O(e_n^2)\big)$$

$$= f'(\alpha)^2\big(2c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big), \quad (2.31)$$

Selanjutnya Persamaan (2.28) dikuadratkan maka diperoleh

$$f'^2(x_n) = \Big(f'(\alpha)\big(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\big)\Big)^2$$

$$= f'(\alpha)^2\big(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big), \quad (2.32)$$

Jika Persamaan (2.32) dikurang dengan Persamaan (2.31), maka diperoleh

$$f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n) = f'(\alpha)^2\big(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big) - f'(\alpha)^2\big(2c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\big)$$

$$= f'(\alpha)^2\big(e_n + 3c_2e_n^2 + (4c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\big), \quad (2.33)$$

Subsitusikan Persamaan (2.30) dan Persamaan (2.33) ke Persamaan (2.25), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n + c_2 e_n^2 + (6c_3 - 2c_2)e_n^2 + O(e_n^3)\right). \tag{2.34}$$

Oleh karena $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka

$$\alpha + e_{n+1} = \alpha + e_n - \left(e_n + c_2 e_n^2 + (6c_3 - 2c_2)e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.35}$$

atau

$$e_{n+1} = -c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \blacksquare \tag{2.36}$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, persamaan konvergen kubik. Persamaan (2.36) merupakan persamaan *error* Metode Schroder memiliki indeks efisiensi $2^{1/3} \approx 1{,}259921$.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan penelitian ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian untuk menyelesaikaan permasalahan pada penelitian untuk menyelesaikan ada penelitian ini dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mendefinisikan kembali Persamaan (1.2) dengan bentuk
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1-L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.1}$$
dengan
$$\boldsymbol{L_f(x_n)} = \frac{\boldsymbol{f''(x_n)f(x_n)}}{\boldsymbol{f'(x_n)^2}}.$$
2. Untuk mendapatkan varian dari Metode Schroder Persamaan (3.1) ditambahkan parameter β, sehingga diperoleh:
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1-\beta L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.2}$$
3. Kemudian $\left(\boldsymbol{\frac{1}{1-\beta L_f}}\right)$ pada Persamaan (3.2) diekspansi menggunakan Deret Taylor orde satu, sehingga Persamaan (3.2) dapat ditulis dalam bentuk
$$x_{n+1} = x_n - (1+\beta L_f)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.3}$$
4. Mendefinisikan kembali Deret Taylor orde dua dalam bentuk
$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1}-x_n)^2 \tag{3.4}$$
5. Mengkontruksi metode iterasi dengan menuliskan kembali Persamaan (3.4) menjadi
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2}{f(x_n)}\right). \tag{3.5}$$
6. Memasukkan bentuk varian Metode Schoder pada Persamaan (3.3) ke dalam orde dua Deret Taylor pada Persamaan (3.5).

7. Mengganti turunan keduanya dengan

$$f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f^2(x_n)}. \tag{3.6}$$

8. Menentukan orde konvergensi berdasarkan rumusan iterasi yang diperoleh bentuk metode iterasi yang baru.
9. Membuat simulasi numerik dengan menggunakan hitungan komputasi dalam hal ini menggunakan *software maple13*
10. Membandingkan hasil penelitian dengan metode lain, seperti varian Metode Schroder yang sudah dimodifikasi.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Schroder (Schroder, 1870) yang memiliki orde konvergensi dua yang dimodifikasi menjadi varian Metode Schroder dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor orde dua dan untuk menghidari penggunakan turunan kedua maka digunakan persamaan $f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f^2(x_n)}$. Sehingga didapatkan metode iterasi baru, yaitu :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n)} + 4\beta \frac{f(y_n)^2}{f(x_n)^2} + 4\beta^2 \frac{f(y_n)^3}{f(x_n)^3}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5.1}$$

Berdasarkan analisis orde konvergensi, Persamaan (5.1) memiliki orde onvergensi empat dengan $\beta = \frac{1}{2}$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$ dan indeks efisiensi $4^{1/3} \approx 1{,}587401$, yang dapat dilihat

$$e_{n+1} = (24c_2^2 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{5.2}$$

Persamaan (5.1) juga memiliki kondisi khusus yang apabila kita mengganti nilai parameter β dengan nilai 0, ½, -½ dan 1 maka memiliki hasil orde konvergensi tiga dan empat. Berdasarkan hasil simulasi numerik dapat disimpulkan melalui Tabel 4.2 nilai iterasi dari metode iterasi baru pada Persamaan (5.1) dan COC untuk $\varepsilon = 10^{-20}$ dan 10^{-95}, Tabel 4.3 perbandingan jumlah iterasi untuk $\varepsilon = 10^{-20}$ dan 10^{-95}, menunjukkan bahwa Persamaan (5.1) memiliki iterasi lebih sedikit. Pada Table 4.4 perbandingan COC pada $\varepsilon = 10^{-20}$ dan Table 4.5 perbandingan COC pada $\varepsilon = 10^{-95}$ menunjukkan bahwa Persamaan (5.1) memiliki orde konvergensi empat. Tabel 4.6 sampai dengan Tabel 4.8 dapat dilihat bahwa nilai desimal dari $|f(x_n)|$, galat mutlak $|x_n - \alpha|$ dan galat relative $|x_{n+1} - x_n|$ Persamaan (5.1) memiliki nilai yang lebih kecil dari metode lainnya. Serta Tabel 4.9 sampai dengan Tabel 4.11 yaitu nilai desimal dari $|f(x_n)|$, galat mutlak $|x_n - \alpha|$ dan galat relative $|x_{n+1} - x_n|$ Persamaan (5.1) pada iterasi keempat memiliki nilai yang lebih kecil dibandingkan metode lainnya. Hal ini menunjukan Persamaan (5.1) lebih baik dari

MN, SC, MC dan MH. Dan metode ini menunjukkan bahwa lebih efektif digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dalam menghampiri akar persamaan.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis termotivasi oleh (Thukral, 2015) yang memodifikasi Metode Schroder dengan mengaproksimasi m multiplisitas, lalu persamaan turunan kedua yang diganti dengan persamaan lain untuk menghilangkan penggunaan turunan kedua (Wartono, 2016), dan (Traub, 1964) yang menggunakan Deret Taylor orde dua. Penulis juga menggunakan COC dan indeks efisiensi untuk melihat orde konvergensi dan keefektifan metode iterasi baru. Selanjutnya, Penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengembangkan hasil modifikasi pada Tugas Akhir ini agar mendapatkan metode iterasi baru dengan orde konvergensi tinggi dan lebih efektif digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.

DAFTAR PUSTAKA

Amat, S., S. Busquier., dan J. M. Gutierrez.”Geometric Constructions of Iterative Function to Solve Nonlinear Equations.”*Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 157, hal.197-205. 2003.

Burden, L.C., dan J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Ninth Edition. 2010.

Chapra, L.S., dan R.P Canale. *Numerical Methods for engineering*. Sevent Edition. 2015.

Chun, C. “A Family of Composite Fourth-order Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations”. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 187. Hal 951-956. 2007.

Chun, C. “Some Fourth-order Modification of Newton Methods”. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 197. Hal 654-658. 2008.

Chun, C. “Some Fourth-order Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations”. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 195. Hal 454-459. 2008.

Chun, C. “Family of Composite Fourth-order Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations”. *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 187. Hal 951-956. 2008.

Eskandari, H. “A new Numerical Solving Method Equation of One Variabel”. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. Vol 44. Hal 196-199. 2008.

E. Schroder’s. *Uber Unendlich Viele Algorithmen Zur Auflo Sung der Gleichungen*. *Math*. Ann. 2 (1870). hal. 317–365

Gander,W. “On Halley’s Iteration Methods”. *The American Mathematical Monthly*. Switzerland. Hal 130-134. 1985.

Ghanbari, B. “A New General fourth-order family of Methods for finding simple roots of nonlinear equations”. *Journal of King Saud University-Science*. Vol. 23. Hal 395-398. 2011.

Gupta, K.C., V, Kanwar dan S, Kumara. “A Family of Ellipse Methods for Solving Non-Linear Equations”. *Internasional journal Mathematics Education Science Technology.* Vol. 40(4). hal. 571-576. 2009.

Hoffman, J.D. *Numerical Methods for Engineers and Scientist*. Second Edition Revised and Expanded. New York : Basel.1992.

Ide, N.A.D. "A New Hybrid Iteration Method for Algebraic Equations". *Applied Mathematics and Computation*. Vol.195. hal. 772-774. 2008.

Kanwar, V., K.K, Sharma, dan R, Behl. "A New Family Of Schroder Method and its Variants based on Power Mean for Multipe Roots of Nonlinear Equation". *International Journal of mathematical Eduction in Science and Technology*. Panjab University: University Institute of Engineering an Technology, Departement of Mathematics. Punjab, India. Hal 558-565. 2009.

Petkovic, M.S., L.D, Petkovic dan D. Herceg. "On Schrodes Families of Root-Finding Methods". Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 233, hal. 1755-1762. 2010.

Sharma, J. R., R. K. Guha., dan R. Sharma. "Some Modified Newton's Methods with Fourth-Order Convergence." *Advance in Science Research*. Vol. 2, hal. 240-247. 2011.

Stoer, J., dan Bulirsch. Introduction to Numerical Analysis. Second Edition. 1991.

Thukral, R. "New Fourth-order Schroder-type Methods for Finding Zeros of Nonlinear Equation Having unknown Multiplicity". *British Journal of mathematics and Computer Science*. Vol. 13(1), hal. 1-10. 2016.

Thukral, R. "Further Acceleration of Thukral Third-Order Method for Determining Multiple Zero of Nonlinear Equation". *American Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 7 (5), hal. 123-128. 2017.

Thukral, R. "New Third-Order Scroder-Type Method for Finding Zeros of Nonlinear Equation Having Unknon Multiplicity". *American Journal of Compuational and Applied Mathematics*. Vol. 5(5), hal. 147-153. 2015.

Thukral, R. "New Modification of Newton Method with Third-Order Convergence for Solving nonlinear equation of Type $f(0) = 0$". *American Journal of Compuational and Applied Mathematics*. Vol. 6(1), hal. 14-18. 2016.

Traub, J.F., "*Iterative Methods for The Solution of Equation*". Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1964.

Wartono dan T. Nanda. "Modifikasi Metode Bahgat tanpa Turunan Kedua dengan Orde Konvergensi Optimal". *Seminar nasional teknologi Informasi, komunikasi dan industry (SNTIKI).* Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri Islam Sultan Syarif Kasim Riau. Hal. 612-618. 2017.

LAMPIRAN A

Orde Konvergensi Modifikasi Varian Metode Schroder Menggunakan Deret Taylor Orde Dua

> $restart;$

> $Order := 7;$

$$Order := 7$$

> $x_n := e_n;$

$$x_n := e_n$$

> $fx_n := e_n + c_2 \cdot e_n^2 + c_3 \cdot e_n^3 + c_4 \cdot e_n^4 + c_5^5 \cdot e_n^5 + c_6^6 \cdot e_n^6 + \mathrm{O}(e_n^7);$

$$fx_n := e_n + c_2\, e_n^2 + c_3\, e_n^3 + c_4\, e_n^4 + c_5^5\, e_n^5 + c_6^6\, e_n^6 + \mathrm{O}(e_n^7)$$

> $dfx_n := diff\,(fx_n, e_n);$

$$dfx_n := 1 + 2\, c_2\, e_n + 3\, c_3\, e_n^2 + 4\, c_4\, e_n^3 + 5\, c_5^5\, e_n^4 + 6\, c_6^6\, e_n^5 + \mathrm{O}(e_n^6)$$

> $y_n := collect\left(expand\left(series\left(x_n - \frac{fx_n}{dfx_n}, e_n\right)\right), e_n\right);$

$$y_n := c_2\, e_n^2 + \left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) e_n^3 + \left(-7\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 4\, c_2^3\right) e_n^4 + \left(-10\, c_2\, c_4 + 4\, c_5^5 - 6\, c_3^2 + 20\, c_3\, c_2^2 - 8\, c_2^4\right) e_n^5 + \left(-13\, c_2\, c_5^5 + 5\, c_6^6 - 17\, c_4\, c_3 + 28\, c_4\, c_2^2 + 33\, c_2\, c_3^2 - 52\, c_3\, c_2^3 + 16\, c_2^5\right) e_n^6 + \mathrm{O}(e_n^7)$$

> $fy_n := collect\left(expand\left(series\left(y_n + c_2\, y_n^2 + c_3\, y_n^3 + c_4\, y_n^4 + c_5^5\, y_n^5, e_n\right)\right), [e_n]\right);$

$$fy_n := c_2\, e_n^2 + \left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) e_n^3 + \left(-7\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 5\, c_2^3\right) e_n^4 + \left(-10\, c_2\, c_4 + 4\, c_5^5 - 6\, c_3^2 + 24\, c_3\, c_2^2 - 12\, c_2^4\right) e_n^5 + \left(-13\, c_2\, c_5^5 + 5\, c_6^6 - 17\, c_4\, c_3 + 34\, c_4\, c_2^2 + 37\, c_2\, c_3^2 - 73\, c_3\, c_2^3 + 28\, c_2^5\right) e_n^6 + \mathrm{O}(e_n^7)$$

> $L_1 := series\left(\frac{fy_n}{fx_n}, e_n\right);$

$$L_1 := c_2\, e_n + \left(2\, c_3 - 3\, c_2^2\right) e_n^2 + \left(-8\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 5\, c_2^3 + \left(-2\, c_3 + 3\, c_2^2\right) c_2\right) e_n^3 + \left(-11\, c_2\, c_4 + 4\, c_5^5 - 6\, c_3^2 + 24\, c_3\, c_2^2 - 12\, c_2^4 + \left(-2\, c_3 + 3\, c_2^2\right) c_3 + \left(10\, c_2\, c_3 - 3\, c_4 - 8\, c_2^3\right) c_2\right) e_n^4 + \left(-14\, c_2\, c_5^5 + 5\, c_6^6 - 17\, c_4\, c_3 + 34\, c_4\, c_2^2 + 37\, c_2\, c_3^2 - 73\, c_3\, c_2^3 + 28\, c_2^5 + \left(-2\, c_3 + 3\, c_2^2\right) c_4 + \left(10\, c_2\, c_3 - 3\, c_4 - 8\, c_2^3\right) c_3 + \left(14\, c_2\, c_4 - 4\, c_5^5 + 8\, c_3^2 - 37\, c_3\, c_2^2 + 20\, c_2^4\right) c_2\right) e_n^5 + \mathrm{O}\left(e_n^6\right)$$

> $m_1 := series\left(fx_n \cdot fx_n, e_n\right);$

$$m_1 := e_n^2 + 2\, c_2\, e_n^3 + \left(c_2^2 + 2\, c_3\right) e_n^4 + \left(2\, c_2\, c_3 + 2\, c_4\right) e_n^5 + \left(2\, c_5^5 + 2\, c_2\, c_4 + c_3^2\right) e_n^6 + \mathrm{O}\left(e_n^7\right)$$

> $m_2 := series\left(fy_n \cdot fy_n, e_n\right);$

$$m_2 := c_2^2\, e_n^4 + 2\left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) c_2\, e_n^5 + \left(2\, c_2\left(-7\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 5\, c_2^3\right) + \left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right)^2\right) e_n^6 + \mathrm{O}\left(e_n^7\right)$$

> $n_1 := series\left(\dfrac{fy_n \cdot fy_n}{fx_n \cdot fx_n}, e_n\right);$

$$n_1 := c_2^2\, e_n^2 + \left(-2\, c_2^3 + 2\left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) c_2\right) e_n^3 + \left(-4\, c_2^2\left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) + c_2^2\left(-2\, c_3 + 3\, c_2^2\right) + 2\, c_2\left(-7\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 5\, c_2^3\right) + \left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right)^2\right) e_n^4 + \mathrm{O}\left(e_n^5\right)$$

> $L_2 := series\left(4 \cdot \beta \cdot \dfrac{fy_n \cdot fy_n}{fx_n \cdot fx_n}, e_n\right);$

$$L_2 := 4\, \beta\, c_2^2\, e_n^2 + \left(-8\, \beta\, c_2^3 + 8\, \beta\left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) c_2\right) e_n^3 + \left(-16\, \beta\left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right) c_2^2 + 4\, \beta\, c_2^2\left(-2\, c_3 + 3\, c_2^2\right) + 4\, \beta\left(2\, c_2\left(-7\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + 5\, c_2^3\right) + \left(2\, c_3 - 2\, c_2^2\right)^2\right)\right) e_n^4 + \mathrm{O}\left(e_n^5\right)$$

> $m_3 := series\left(fx_n \cdot fx_n \cdot fx_n, e_n\right);$

$$m_3 := e_n^3 + 3\, c_2\, e_n^4 + \left(3\, c_2^2 + 3\, c_3\right) e_n^5 + \left(4\, c_2\, c_3 + 3\, c_4 + c_2\left(c_2^2 + 2\, c_3\right)\right) e_n^6 + \mathrm{O}\left(e_n^7\right)$$

> $m_4 := series\left(fy_n \cdot fy_n \cdot fy_n, e_n\right);$

$$m_4 := c_2^3\, e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

> $n_2 := series\left(\dfrac{fy_n^3}{fx_n^3}, e_n\right);$

$$n_2 := c_2^3\, e_n^3 + O\left(e_n^4\right)$$

> $L_3 := series\left(4 \cdot \beta^2 \cdot \dfrac{fy_n^3}{fx_n^3}, e_n\right);$

$$L_3 := 4\,\beta^2 \cdot c_2^3\, e_n^3 + O\left(e_n^4\right)$$

> $L := 1 + L_1 + L_2 + L_3;$

$$\begin{aligned} L := 1 &+ \Big(c_2\, e_n + \left(2 c_3 - 3 c_2^2\right) e_n^2 + \big(-8 c_2 c_3 + 3 c_4 + 5 c_2^3 + \left(-2 c_3 + 3 c_2^2\right) c_2\big) e_n^3 + \big(-11 c_2 c_4 + 4 c_5^5 - 6 c_3^2 + 24 c_3 c_2^2 \\ &- 12 c_2^4 + \left(-2 c_3 + 3 c_2^2\right) c_3 + \left(10 c_2 c_3 - 3 c_4 - 8 c_2^3\right) c_2\big) e_n^4 \\ &+ \big(-14 c_2 c_5^5 + 5 c_6^6 - 17 c_4 c_3 + 34 c_4 c_2^2 + 37 c_2 c_3^2 - 73 c_3 c_2^3 + 28 c_2^5 + \left(-2 c_3 + 3 c_2^2\right) c_4 + \left(10 c_2 c_3 - 3 c_4 - 8 c_2^3\right) c_3 \\ &+ \left(14 c_2 c_4 - 4 c_5^5 + 8 c_3^2 - 37 c_3 c_2^2 + 20 c_2^4\right) c_2\big) e_n^5 + O\left(e_n^6\right)\Big) + \Big(4 \beta c_2^2 e_n^2 + \left(-8 \beta c_2^3 + 8 \beta \left(2 c_3 - 2 c_2^2\right) c_2\right) e_n^3 + \big(\\ &-16 \beta \left(2 c_3 - 2 c_2^2\right) c_2^2 + 4 \beta c_2^2 \left(-2 c_3 + 3 c_2^2\right) + 4 \beta \left(2 c_2 \left(-7 c_2 c_3 + 3 c_4 + 5 c_2^3\right) + \left(2 c_3 - 2 c_2^2\right)^2\right)\big) e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\Big) \\ &+ \left(4 \beta^2 \cdot c_2^3 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \end{aligned}$$

> $y := collect\left(expand\left(series\left(x_n - (L) \cdot \dfrac{fx_n}{dfx_n}, e_n\right)\right), [e_n]\right); y := eval\left(y, \beta = \dfrac{1}{2}\right);$

$$y := \left(2 c_2^2 - 4 \beta c_2^2\right) e_n^3 + \left(7 c_2 c_3 - 9 c_2^3 + 28 \beta c_2^3 - 16 \beta c_2 c_3 - 4 \beta^2 \cdot c_2^3\right) e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

$$y := \left(-c_2 c_3 + 5 c_2^3 - 2^2 \cdot c_2^3\right) e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 20 Januari 1997 di Jakarta, sebagai anak pertama dari enam bersaudara pasangan Bapak Komi Chaniago, SH dan Ibu Yuliani, SP. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 21 Sungai Limau, Padang Pariaman, Sumatera Barat pada tahun 2009. Penulis melanjutkan sekolah tingat pertama di SMP Negeri 2 Sungai Limau, lalu pindah di tahun 2010 dan menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 13 Padang 2012. Penulis menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di SMA Pertiwi 1 Padang pada tahun 2015 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2015 Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada tahun 2018, tepatnya pada semester VI Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Pemberdayaan Masyarakat dan Desa dengan judul **"Deskriptif Status Desa Di Provinsi Sumatera Barat Berdasarkan Indeks Desa Membangun"** yang dibimbing oleh Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc. dari tanggal 14 Januari sampai 14 Februari 2018 dan diseminarkan pada tanggal 9 Juni 2018. Selanjutnya pada tahun yang sama Penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) pada tanggal 16 Juli 2018 di Desa Teluk Beringin, Kecamatan Gunung Toar, Kabupaten Kuantan Singingi.